Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-77-104
УДК 519.6

Максимальные сцепленные системы на семействах измеримых прямоугольников

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Maximal linked systems on families of measurable rectangles

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Рассматриваются сцепленные и максимальные сцепленные системы (МСС) на π-системах измеримых (в широком смысле) прямоугольников (π-система есть семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Структуры в виде семейства измеримых прямоугольников используются в теории меры и теории вероятностей и приводят обычно к полуалгебре подмножеств декартова произведения. В настоящей работе пространства-сомножители предполагаются оснащенными π-системами с «нулем» и «единицей», что, в частности, может соответствовать стандартной измеримой структуре в виде полуалгебры, алгебры или σ-алгебры множеств. В общем случае семейство измеримых прямоугольников (измеримость отождествляется с принадлежностью к π-системе) само образует π-систему множества-произведения, что позволяет рассматривать МСС на данной π-системе (измеримых прямоугольников). Устанавливается следующее основное свойство: во всех рассматриваемых вариантах π-системы измеримых прямоугольников МСС на произведении исчерпываются произведениями МСС на пространствах-сомножителях. При этом в случае бесконечного произведения, наряду с традиционным, рассматривается «ящичный» вариант, допускающий естественную аналогию с базой ящичной топологии. Для случая произведения двух широко понимаемых измеримых пространств установлено одно свойство гомеоморфности, касающееся оснащений топологиями стоуновского типа.

Ключевые слова: сцепленные системы; измеримые прямоугольники; π-система

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371_а).

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Максимальные сцепленные системы на семействах измеримых прямоугольников // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 77–104. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-77-104.

Abstract. Linked and maximal linked systems (MLS) on π-systems of measurable (in the wide sense) rectangles are considered (π-system is a family of sets closed with respect to finite intersections). Structures in the form of measurable rectangles are used in measure theory and probability theory and usually lead to semi-algebra of subsets of cartesian product. In the present article, sets-factors are supposed to be equipped with π-systems with “zero” and “unit”. This, in particular, can correspond to a standard measurable structure in the form of semi-algebra, algebra, or σ-algebra of sets. In the general case, the family of measurable rectangles itself forms a π-system of set-product (the measurability is identified with belonging to a π-system) which allows to consider MLS on a given π-system (of measurable rectangles). The following principal property is established: for all considered variants of π-system of measurable rectangles, MLS on a product are exhausted by products of MLS on sets-factors. In addition, in the case of infinity product, along with traditional, the “box” variant allowing a natural analogy with the base of box topology is considered. For the case of product of two widely understood measurable spaces, one homeomorphism property concerning equipments by the Stone type topologies is established.

Keywords: linked systems; measurable rectangles; π-system

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00371_a).

For citation: Chentsov A.G. Maksimal’nyye stseplennyye sistemy na semeystvakh izmerimykh pryamougol’nikov [Maximal linked systems on families of measurable rectangles]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 77–104. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-77-104. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

При исследовании ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) оказалось полезным изучение более общих структур в виде так называемых максимальных сцепленных систем (МСС); см. [1–3] и др. Таким образом реализуется внешнее описание пространства у/ф; выясняется, в частности, что некоторые свойства у/ф являются на самом деле свойствами МСС (всякий у/ф есть МСС, но обратное, вообще говоря, неверно). Поэтому, следуя [1–3], мы анализируем свойства МСС. В этой связи напомним важные понятия суперрасширения топологического пространства (ТП) и суперкомпактности (см. [4–6]); отметим здесь же систематическое изложение в [7, гл. VII, § 4], а также обзор в [8, 5.11]. В [1–3] дано развитие некоторых положений [4–6] для случая МСС на π-системе [9, с. 14] с «нулем» и «единицей» (имеется в виду семейство подмножеств фиксированного множества, замкнутое относительно конечных пересечений и содержащее упомянутое множество и пустое множество). Отметим, что часть конструкций [1–3] первоначально была реализована для случая МСС на решетке множеств с «нулем» и «единицей». Обращение к π-системам позволяет, наряду с «топологическим направлением» (см. [4–8]), исследовать некоторые вопросы, касающиеся измеримых пространств (ИП), что определяет некоторую перспективу применения в теории меры. Один из таких вопросов связан с представлениями МСС на произведениях ИП. Такого рода произведения, применяемые в теории меры и теории вероятностей, на промежуточных этапах построения используют обычно семейства измеримых прямоугольников; эти семейства типично являются полуалгебрами множеств даже в случае «перемножения» стандартных ИП с σ-алгебрами множеств. Имея в виду соображения общности, связанные с применением π-систем (каждая полуалгебра множеств является π-системой), представляется логичным допущение об использовании прямоугольников, измеримых в широком смысле (полезно отметить, что топологии являются π-системами и, более того, решетками множеств с «нулем» и «единицей»).

Заметим, что в [10] подобные вопросы исследовались в связи с представлениями у/ф; изучение последних, в свою очередь, важно в связи с описанием нормированных конечно-аддитивных (0,1)-мер (отметим также в этой связи построения [11, гл. 10]). Поскольку у/ф являются МСС, представляется естественным распространение некоторых положений работы [10] на случай пространств, элементами которых являются МСС. Здесь имеется в виду как случай «обычного» произведения двух широко понимаемых ИП, так и вариант обобщенного декартова произведения (см. [12, гл. IV, § 5]). В этих построениях мы широко используем индексную форму записи отображений (см. [13, с. 11]), что особенно важно в случае обобщенных декартовых произведений; в этой связи см. также построения [14, гл. III], касающиеся случайных функций. Конструкции настоящей работы являются логическим продолжением построений [15, раздел 7]. Основное положение имеет здесь следующий смысл: МСС на произведении широко понимаемых ИП исчерпываются произведениями МСС на пространствах-сомножителях. В заключительном разделе статьи мы дополняем положения [15, раздел 7] соответствующим утверждением о гомеоморфности для оснащений множеств МСС топологиями стоуновского типа.

1. Общие понятия и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.). Через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть неупорядоченная пара этих объектов, т. е. множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон, содержащий z. Если u, v и w — объекты, то, как обычно, $\{u;v;w\} \triangleq \{u;v\} \cup \{w\}$. Множества являются объектами. С учетом этого используем следующее общее определение: если x и y — объекты, то $(x,y) \triangleq \{\{x\};\{x;y\}\}$ [12, с. 67] есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом x и вторым элементом y. Вообще, для каждой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы этой УП; они однозначно определяются условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Каждому множеству X сопоставляем семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств (п/м) X; тогда $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ есть семейство всех непустых п/м X, а $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м X. Если $\mathcal{H}$ — семейство и S — множество, то полагаем, что

$$[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\}. \tag{1.1}$$

Для всяких двух множеств A и B через B^A обозначаем (см. [12, с. 77]) множество всех отображений, действующих из A в B; значения таких отображений и прообразы п/м B обозначаются традиционно. Если же $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ множества C при действии g. Для отображений часто используем индексную форму записи (семейство с индексом, см. [13, с. 11]).

В дальнейшем, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и $\overline{1,m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$ при $m \in \mathbb{N}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами, для всякого множества (в частности, семейства) H вместо $H^{\overline{1,m}}$ используем более традиционное H^m для обозначения множества всех кортежей $(h_i)_{i\in\overline{1,m}}:\overline{1,m}\to H$ (то есть множества всех отображений из $\overline{1,m}$ в H).

Специальные семейства. Фиксируем до конца раздела непустое множество $\mathbf{I}$ и рассматриваем семейства из $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, т. е. непустые семейства п/м $\mathbf{I}$. Тогда в виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))\,|\,(\varnothing\in\mathcal{I})\&(\mathbf{I}\in\mathcal{I})\&(A\cap B\in\mathcal{I}\ \ \forall A\in\mathcal{I}\ \ \forall B\in\mathcal{I})\}$$

имеем семейство всех π-систем п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей». Полезный вариант π-системы доставляет полуалгебра множеств (см. [14, гл. I]). В этой связи при $\mathcal{L}\in\pi[\mathbf{I}]$, $A\in\mathcal{P}(\mathbf{I})$ и $n\in\mathbb{N}$ полагаем, что

$$\Delta_n(A,\mathcal{L}) \triangleq \{(L_i)_{i\in\overline{1,n}}\in\mathcal{L}^n\,|\,(A=\bigcup_{i=1}^{n}L_i)\&(L_p\cap L_q=\varnothing\ \ \forall p\in\overline{1,n}\ \ \forall q\in\overline{1,n}\setminus\{p\})\},$$

получая множество всех разбиений A множествами из $\mathcal{L}$, имеющих «длину» n. Тогда

$$\Pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{L}\in\pi[\mathbf{I}]\,|\,\forall L\in\mathcal{L}\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\ \Delta_n(\mathbf{I}\setminus L,\mathcal{L})\neq\varnothing\}$$

есть семейство всех полуалгебр п/м $\mathbf{I}$.

Сцепленность. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство п/м $\mathbf{I}$, то полагаем, что

$$\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{X}\in\mathcal{P}'(\mathfrak{X})\,|\,A\cap B\neq\varnothing\ \ \forall A\in\mathcal{X}\ \ \forall B\in\mathcal{X}\}, \tag{1.2}$$

получая семейство всех сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$; тогда

$$\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{X}\in\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}]\,|\,\forall\mathcal{Y}\in\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}]\ \ (\mathcal{X}\subset\mathcal{Y})\Longrightarrow(\mathcal{X}=\mathcal{Y})\} \tag{1.3}$$

есть семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$. Для всех наших последующих построений будет достаточен случай $\mathfrak{X}\in\pi[\mathbf{I}]$, которым мы и ограничимся в смысле реализации (1.2), (1.3). Отметим три существенных в дальнейшем свойства, фиксируя до конца раздела π-систему $\mathcal{L}\in\pi[\mathbf{I}]$. Так,

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] = \{\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}]\,|\,\forall L\in\mathcal{L}\ \ (L\cap\Sigma\neq\varnothing\ \forall\Sigma\in\mathcal{E})\Longrightarrow(L\in\mathcal{E})\}. \tag{1.4}$$

Кроме того, имеем (см. (1.1)) с очевидностью, что $\forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}]\ \ \forall\Sigma\in\mathcal{E}$

$$[\mathcal{L}](\Sigma)\subset\mathcal{E}. \tag{1.5}$$

Свойство (1.5) подобно аналогичному свойству фильтров. Отметим здесь же, что $\mathbf{I}\in\mathcal{E}$ $\forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}]$.

2. Сцепленные семейства на π-системах измеримых прямоугольников

Рассмотрим сначала применение (1.2)–(1.5) в простейшем случае произведения двух ИП, используя построения [15, раздел 7]. Итак, пусть (в настоящем разделе) E_1 и E_2 — непустые множества, $\mathcal{L}_1\in\pi[E_1]$ и $\mathcal{L}_2\in\pi[E_2]$. Если $\mathfrak{L}_1\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_1))$ и $\mathfrak{L}_2\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_2))$, то полагаем, что

$$\mathfrak{L}_1\{\times\}\mathfrak{L}_2 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\times\mathrm{pr}_2(z):\ z\in\mathfrak{L}_1\times\mathfrak{L}_2\}. \tag{2.1}$$

Элементы семейства (2.1) — суть $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$-прямоугольники. Легко видеть, что (см. (2.1))

$$\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 = \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2\} \in \pi[E_1 \times E_2]. \tag{2.2}$$

Мы имеем три (широко понимаемых) ИП: $(E_1, \mathcal{L}_1)$, $(E_2, \mathcal{L}_2)$ и $(E_1 \times E_2, \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2)$. Совсем кратко напомним основные положения [15, раздел 7]. Так,

$$\mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \in \langle\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_1 \times E_2] \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle[E_1] \ \ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_2]. \tag{2.3}$$

В частности, (2.3) применимо к МСС и, более того (см. [15, предложение 22]),

$$\mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \in \langle\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \ \ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]. \tag{2.4}$$

С другой стороны, в виде следствия [15, предложение 21] имеем, что

$$\begin{gathered}\forall \mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \ \ \exists \mathcal{E}_1 \in \langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \ \ \exists \mathcal{E}_2 \in \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2] : \\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) вытекает, что (см. [15, теорема 2]) справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \\ &\quad = \{\mathrm{pr}_1(z)\{\times\}\mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]\} \\ &\quad = \{\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} : \ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

В этой связи отметим, что для сцепленных (не максимальных) систем аналог (2.5) (а, стало быть, и аналог (2.6)) уже может не иметь места.

Пример. Пусть $E_1 = \overline{1,3} = \{1;2;3\}$ и $E_2 = \overline{1,3} = \{1;2;3\}$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}(E_1)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{P}(E_2)$ и $\mathcal{E} \stackrel{\triangle}{=} \{E_1 \times \{2\}; \{2\} \times E_2; \{(2,2)\}\}$. Заметим, что $\{(2,2)\} = \{2\} \times \{2\}$. Легко видеть, что

$$\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_1 \times E_2]. \tag{2.7}$$

Допустим, что $\mathcal{E}_1 \in \langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle[E_1]$ и $\mathcal{E}_2 \in \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_2]$ таковы, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$. Тогда $E_1 \times \{2\} \in \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$ и $\{2\} \times E_2 \in \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$. Таким образом (см. [15, предложение 17]), $E_1 \in \mathcal{E}_1$ и $E_2 \in \mathcal{E}_2$. Поэтому $E_1 \times E_2 \in \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$ в силу (2.1). Следовательно, $E_1 \times E_2 \in \mathcal{E}$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что наше предположение о существовании сцепленных семейств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ со свойством $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$ неверно и на самом деле

$$\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle[E_1] \ \ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_2]. \tag{2.8}$$

Итак, мы указали сцепленное семейство (2.7) со свойством (2.8). □

Из сопоставления (2.6) и только что рассмотренного примера видно, какую важную роль играет максимальность сцепленных систем в вопросе представления в виде произведения. В следующем разделе мы рассмотрим аналогичные вопросы для общего случая ИП и МСС.

3. Некоторые общие свойства произведений широко понимаемых измеримых пространств

Всюду в дальнейшем будут, если не оговорено противное, фиксированы непустые множества X и $\mathbf{E}$, а также отображение $(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$. Итак, при $x \in X$ в виде E_x имеем непустое п/м $\mathbf{E}$. Получаем, что

$$\mathbb{E} \triangleq \prod_{x\in X} E_x = \{f \in \mathbf{E}^X \mid f(x) \in E_x \ \forall x \in X\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E}^X) \tag{3.1}$$

(здесь и ниже используется аксиома выбора). Кроме того, фиксируем в дальнейшем

$$(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \pi[E_x]; \tag{3.2}$$

тогда $\mathcal{L}_t \in \pi[E_t]$ при $t \in X$. Ниже рассматриваются следующие два варианта оснащения $\mathbb{E}$ π-системами (см. [16, (6.4), (6.5)]):

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x : \ (H = \prod_{x\in X} L_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \\ L_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\} \in \pi[\mathbb{E}], \tag{3.3}$$

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x \triangleq \{\prod_{x\in X} L_x : \ (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\} \in \pi[\mathbb{E}]; \tag{3.4}$$

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \subset \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x. \tag{3.5}$$

Итак, получаем два варианта широко понимаемого понимаемого ИП:

$$(\mathbb{E}, \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x), \quad (\mathbb{E}, \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x). \tag{3.6}$$

В настоящем разделе сосредоточимся на вопросах описания МСС для второго (в (3.6)) варианта, имея в виду построение аналога (2.6). Для этого нам потребуется распространить (3.4) на случай произведения произвольных непустых семейств, каждое из которых является подсемейством $\mathcal{P}(E_x)$, где $x \in X$. Итак, полагаем в дальнейшем, что

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x \triangleq \{\prod_{x\in X} \Sigma_x : \ (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{E}_x\} \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x)); \tag{3.7}$$

разумеется, в (3.7) мы всякий раз получаем семейство из $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}^X))$. Теперь (3.4) является частным случаем (3.7). Более того (см. (3.7)), как легко проверить,

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E})) \ \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x)). \tag{3.8}$$

В частности, (3.8) может использоваться в случае, когда заданы (сцепленные) семейства $\mathcal{E}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[E_x] \ \forall x \in X$.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[E_x]$, *то*

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}].$$

Доказательство является (в условиях аксиомы выбора) простым следствием свойства [16, (6.3)]. Здесь же отметим очевидное свойство: если выполнено $(A_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$ и $(B_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$, то

$$(\prod_{x\in X} A_x = \prod_{x\in X} B_x) \Longleftrightarrow (A_x = B_x \ \forall x \in X). \tag{3.9}$$

Из (3.9) вытекает, что $\forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \ \ \exists!(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x):$

$$H = \prod_{x\in X} \Sigma_x. \tag{3.10}$$

С учетом (3.10) корректно следующее общее определение: полагаем, что

$$\mathbf{P}: \ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x) \tag{3.11}$$

определяется условиями: при $H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x))\setminus\{\varnothing\}$ мультиотображение $\mathbf{P}(H) \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)$ таково, что

$$H = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}(H)(\chi). \tag{3.12}$$

Легко видеть, что $\mathbf{P}(H) \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ при $H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$. Отметим, что

$$\mathbb{E} \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\prod_{x\in X} \Sigma_x \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x). \tag{3.13}$$

Поэтому (3.12) можно применять в случае, отмеченном в (3.13). Кроме того, имеем очевидное (см. (3.11), (3.12)) свойство

$$\mathbf{P}(H) \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x) \ \ \forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.14}$$

Итак, на самом деле $\mathbf{P}: \ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$. С учетом (3.10) имеем при $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ и $t \in X$ равенство

$$\Sigma_t = \mathbf{P}(\prod_{x\in X} \Sigma_x)(t). \tag{3.15}$$

В связи с (3.2) отметим следующие очевидные свойства:

$$\begin{gathered}(\prod_{x\in X} \mathcal{L}_x \subset \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x))\&(\prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}) \subset \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x))\& \\ ((\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}).\end{gathered} \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что (3.15) выполняется при $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$. Тогда

$$\prod_{x\in X} L_x \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}).$$

С учетом (3.14) полагаем теперь при $\chi \in X$, что

$$\mathbf{P}_\chi : \ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \mathcal{P}'(E_\chi) \tag{3.17}$$

определяется естественным правилом проектирования: если $H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$, то $\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{P}'(E_\chi)$ имеет вид

$$\mathbf{P}_\chi(H) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{P}(H)(\chi). \tag{3.18}$$

Из (3.15) и (3.18) вытекает, что при $\chi \in X$ и $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} \Sigma_x) = \Sigma_\chi.$$

С учетом (3.16) получаем теперь следующее свойство:

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} L_x) = L_\chi \ \ \forall (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}) \ \forall \chi \in X. \tag{3.19}$$

Заметим, что определения (3.11), (3.12) и (3.17), (3.18) имеют общий характер и «не привязаны» к варианту (3.4) (построения произведения π-систем); это будет использовано в дальнейшем в связи с (3.3). С учетом (3.12) и (3.18) получаем, конечно, что

$$H = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}_\chi(H) \ \ \forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.20}$$

В (3.20) могут использоваться варианты, отмеченные в (3.16). Так, в частности,

$$H = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}_\chi(H) \ \ \forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.21}$$

Для отображений (3.17) и (3.18) используем стандартную операцию взятия образа. Так, при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\})$ и $\chi \in X$

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{P}_\chi)^1(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(E_\chi)). \tag{3.22}$$

Вместе с тем, $\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\} \ \forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \ \forall \chi \in X$. Поэтому

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\}) \ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}). \tag{3.23}$$

В связи с (3.23) отметим одно общее свойство: если M — непустое множество и $\mathcal{M} \in \pi[M]$, то

$$\langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle[M] \subset \mathcal{P}(\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}). \tag{3.24}$$

Свойство (3.24) позволяет использовать в (3.23) сцепленные подсемейства $\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x$.

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]$ *и* $\chi \in X$, *то*

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle[E_\chi].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{T} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]$ и $\chi \in X$, получая, в частности, что

$$\mathcal{T} \subset (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T}) \subset \mathcal{L}_\chi$, а потому

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}_\chi),$$

где $\mathcal{L}_\chi \in \pi[E_\chi]$. Выберем произвольно $\Gamma_1 \in \mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T})$ и $\Gamma_2 \in \mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T})$. Тогда (см. (3.23)) по определению операции взятия образа для некоторых $\mathbb{T}_1 \in \mathcal{T}$ и $\mathbb{T}_2 \in \mathcal{T}$

$$(\Gamma_1 = \mathbf{P}_\chi(\mathbb{T}_1))\&(\Gamma_2 = \mathbf{P}_\chi(\mathbb{T}_2)). \tag{3.25}$$

В частности, $\mathbb{T}_1 \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ и $\mathbb{T}_2 \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$. Поэтому для некоторых

$$((\mathbb{T}^{(1)}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}))\&((\mathbb{T}^{(2)}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}))$$

реализуются следующие равенства

$$(\mathbb{T}_1 = \prod_{x\in X} \mathbb{T}^{(1)}_x)\&(\mathbb{T}_2 = \prod_{x\in X} \mathbb{T}^{(2)}_x). \tag{3.26}$$

В силу (3.19), (3.25) и (3.26) получаем, что $\Gamma_1 = \mathbb{T}^{(1)}_\chi$ и $\Gamma_2 = \mathbb{T}^{(2)}_\chi$. В силу сцепленности $\mathcal{T}$ имеем, однако, что $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 \neq \varnothing$, а потому (см. (3.26)) $\mathbb{T}^{(1)}_x \cap \mathbb{T}^{(2)}_x \neq \varnothing \ \forall x \in X$. В частности, получаем, что

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \mathbb{T}^{(1)}_\chi \cap \mathbb{T}^{(2)}_\chi \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор Γ_1 и Γ_2 был произвольным, установлено свойство

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle[E_\chi],$$

что и требовалось доказать. □

С учетом предложений 3.1 и 3.2 получаем, что при $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]$

$$(\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}))_{\chi\in X} \in \prod_{\chi\in X} \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle[E_\chi],$$

а потому согласно предложению 3.1 определено сцепленное семейство

$$\bigodot_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]. \tag{3.27}$$

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]$, *то непременно*

$$\mathcal{E} \subset \bigodot_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}). \tag{3.28}$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]$. Тогда, в частности,

$$\mathcal{E} \in \mathcal{P}'((\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}).$$

Кроме того, имеем (3.27), где

$$\bigodot_{x \in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) = \{\prod_{x \in X} \Sigma_x : (\Sigma_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E})\} \tag{3.29}$$

в силу (3.7). Выберем произвольно $T \in \mathcal{E}$, получая, в частности, что $T \in (\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$. С учетом (3.21) имеем

$$T = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(T). \tag{3.30}$$

Тогда согласно (3.22) $\mathbf{P}_\chi(T) \in \mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E})$ при $\chi \in X$. Как следствие

$$(\mathbf{P}_x(T))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E})$$

и согласно (3.29), (3.30) получаем следующее свойство

$$T \in \bigodot_{x \in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}).$$

Поскольку T выбиралось произвольно, требуемое свойство (3.28) установлено. □

Отметим очевидное свойство:

$$\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[E_x]. \tag{3.31}$$

В силу (3.31) предложение 3.1 и (3.27) могут использоваться в случае произведения МСС.

Предложение 3.4. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$, *то непременно*

$$\mathcal{E} = \bigodot_{x \in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}).$$

Доказательство получается комбинацией (1.3), (3.27) и предложения 3.3.

Предложение 3.5. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ *и* $t \in X$, *то*

$$\mathbf{P}^1_t(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_t - \mathrm{link}\rangle_0[E_t]. \tag{3.32}$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ и $t \in X$. Используем предложение 3.2: $\mathbf{P}^1_t(\mathcal{E})$ — сцепленное подсемейство $\mathcal{L}_t$, где $\mathcal{L}_t \in \pi[E_t]$. Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}_t$ и при этом

$$\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathbf{P}^1_t(\mathcal{E}). \tag{3.33}$$

Введем в рассмотрение отображение $(M^*_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ посредством следующего правила:

$$(M^*_t \triangleq \mathbb{L})\&(M^*_x \triangleq E_x \ \forall x \in X \setminus \{t\}).$$

Ясно, что $(M_x^*)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$ и

$$\prod_{x\in X} M_x^* \in (\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x)\setminus\{\varnothing\}. \tag{3.34}$$

С учетом (1.4) и (3.34) получаем импликацию

$$((\prod_{x\in X} M_x^*)\cap\Sigma\neq\varnothing \ \ \forall\Sigma\in\mathcal{E}) \Longrightarrow (\prod_{x\in X} M_x^*\in\mathcal{E}). \tag{3.35}$$

Пусть $\Sigma^*\in\mathcal{E}$. Тогда, в частности, имеем, что

$$\Sigma^*\in(\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x)\setminus\{\varnothing\}.$$

Используя (3.17), получаем, что $\mathbf{P}_\chi(\Sigma^*)\in\mathcal{P}'(E_\chi)\ \forall\chi\in X$. Более того,

$$(\mathbf{P}_x(\Sigma^*))_{x\in X}\in\prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x\setminus\{\varnothing\}). \tag{3.36}$$

При этом, как легко видеть, справедливо равенство (см. (3.21))

$$\Sigma^*=\prod_{x\in X}\mathbf{P}_x(\Sigma^*).$$

Как следствие получаем равенство

$$(\prod_{x\in X} M_x^*)\cap\Sigma^*=\prod_{\chi\in X}(M_\chi^*\cap\mathbf{P}_\chi(\Sigma^*)). \tag{3.37}$$

Отметим, что (см. (3.22)) $\mathbf{P}_t(\Sigma^*)\in\mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})$, а тогда в силу (3.33)

$$M_t^*\cap\mathbf{P}_t(\Sigma^*)=\mathbb{L}\cap\mathbf{P}_t(\Sigma^*)\neq\varnothing.$$

С другой стороны, в силу (3.36) при $x\in X\setminus\{t\}$ имеем, что

$$M_x^*\cap\mathbf{P}_x(\Sigma^*)=E_x\cap\mathbf{P}_x(\Sigma^*)=\mathbf{P}_x(\Sigma^*)\neq\varnothing.$$

Получили, что $M_x^*\cap\mathbf{P}_x(\Sigma^*)\neq\varnothing\ \forall x\in X$. Из (3.37) имеем теперь (с использованием аксиомы выбора), что

$$(\prod_{x\in X} M_x^*)\cap\Sigma^*\neq\varnothing.$$

Поскольку Σ^* было выбрано произвольно, установлено свойство

$$(\prod_{x\in X} M_x^*)\cap\Sigma\neq\varnothing\ \ \forall\Sigma\in\mathcal{E}.$$

В силу (3.35) получаем, как следствие, включение $\prod\limits_{x\in X} M_x^*\in\mathcal{E}$, а тогда

$$\mathbb{L}=M_t^*=\mathbf{P}_t(\prod_{x\in X} M_x^*)\in\mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})$$

при условии (3.33). Итак, установлена следующая импликация:

$$(\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})) \Longrightarrow (\mathbb{L} \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})).$$

Поскольку выбор $\mathbb{L} \in \mathcal{L}_t$ был произвольным, получили, что $\forall L \in \mathcal{L}_t$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})) \Longrightarrow (L \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})).$$

С учетом (1.4) и предложения 3.2 получаем требуемое положение (3.32). □

Из предложений 3.4 и 3.5 следует, в частности, что

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] \ \ \exists (\mathcal{S}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] : \ \mathcal{E} = \bigodot_{x \in X} \mathcal{S}_x. \tag{3.38}$$

Действительно, из предложения 3.5 вытекает, что

$$(\mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]; \tag{3.39}$$

теперь для проверки (3.38) достаточно учесть (1.3), (3.7) и (3.39).

П р е д л о ж е н и е 3.6. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$, *то*

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{3.40}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$. Тогда в силу (3.31) и предложения 3.1 имеем с очевидностью, что

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]. \tag{3.41}$$

Выберем произвольно $\mathbb{L} \in \bigodot\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x$. С учетом (3.4) подберем $(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x$ со свойством

$$\mathbb{L} = \prod_{x \in X} \Lambda_x. \tag{3.42}$$

Допустим теперь, что $\mathbb{L}$ обладает свойством

$$\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x. \tag{3.43}$$

Выберем произвольно $u \in X$, получая при этом $\Lambda_u \in \mathcal{L}_u$. Тогда в силу (1.4) имеем импликацию

$$(\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u) \Longrightarrow (\Lambda_u \in \mathcal{E}_u) \tag{3.44}$$

(действительно, $\mathcal{E}_u$ есть МСС). Проверим истинность посылки в (3.44). Пусть $T \in \mathcal{E}_u$. Тогда, в частности, $T \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$. Введем в рассмотрение отображение $\varphi_u(T) \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ по следующему правилу:

$$(\varphi_u(T)(u) \triangleq T) \& (\varphi_u(T)(x) \triangleq E_x \ \ \forall x \in X \setminus \{u\}).$$

Легко видеть (см. раздел 1), что в этом случае $\varphi_u(T) \in \prod_{x \in X} \mathcal{E}_x$ и определено множество

$$\prod_{x \in X} \varphi_u(T)(x) = \{f \in \mathbf{E}^X | f(s) \in \varphi_u(T)(s) \ \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}(\mathbf{E}^X).$$

При этом, конечно, имеет место следующее свойство:

$$\prod_{x \in X} \varphi_u(T)(x) \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x.$$

Далее, в силу (3.42) и (3.43) имеем, что

$$\mathbb{L} \cap (\prod_{x \in X} \varphi_u(T)(x)) = \prod_{x \in X} (\Lambda_x \cap \varphi_u(T)(x)) \neq \varnothing.$$

Это означает, что $\Lambda_x \cap \varphi_u(T)(x) \neq \varnothing \ \ \forall x \in X$. В частности,

$$\Lambda_u \cap T = \Lambda_u \cap \varphi_u(T)(u) \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор T был произвольным, установлено, что

$$\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u. \tag{3.45}$$

Из (3.44) и (3.45) получаем, что $\Lambda_u \in \mathcal{E}_u$. Итак, установлено, что

$$\Lambda_x \in \mathcal{E}_x \ \ \forall x \in X.$$

Как следствие получаем с очевидностью, что (см. (3.7), (3.42))

$$\mathbb{L} = \prod_{x \in X} \Lambda_x \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x$$

при условии (3.43). Поскольку выбор $\mathbb{L}$ был произвольным, установлено, что $\forall L \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x) \Longrightarrow (L \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

С учетом (1.4) и (3.41) получаем требуемое свойство (3.40). □

Теорема 3.1. *Справедливо равенство*

$$\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] = \{\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x : \ (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]\}.$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (3.38) и предложения 3.6.

Итак, в случае «ящичной» π-системы (3.4) (здесь отмечена аналогия с базой ящичной топологии на декартовом произведении множеств; см. [17, с. 198]) МСС на произведении исходных π-систем исчерпываются произведениями МСС на пространствах-сомножителях.

4. Максимальные сцепленные системы на обобщенном декартовом произведении широко понимаемых измеримых пространств

Рассмотрим первое в (3.6) ИП, определяемое π-системой (3.3). Здесь мы также распространяем (3.3) на более общий случай. В этой связи условимся о некоторых общих обозначениях. Если $\mathbb{H}$ — непустое множество, то

$$(\mathrm{Fam})[\mathbb{H}] \triangleq \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H})) \mid \mathbb{H} \in \mathcal{H}\},$$

получая непустое подсемейство $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$ (заметим, что при $\mathcal{H} \in (\mathrm{Fam})[\mathbb{H}]$ объединение всех множеств из $\mathcal{H}$ совпадает с $\mathbb{H}$); $\pi[\mathbb{H}] \subset (\mathrm{Fam})[\mathbb{H}]$. В случае, связанном с (3.1), имеем, что

$$\prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x] = \{(\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X \mid \mathcal{F}_t \in (\mathrm{Fam})[E_t]\ \forall t \in X\}. \tag{4.1}$$

При этом, конечно, у нас $\pi[E_x] \subset (\mathrm{Fam})[E_x]\ \ \forall x \in X$. Поэтому (см. (4.1))

$$\prod_{x\in X}\Pi[E_x] \subset \prod_{x\in X}\pi[E_x] \subset \prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x]. \tag{4.2}$$

Тогда, как обычно (см. [14, раздел III.3]), полагаем, обобщая (3.3), что

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X}\mathcal{F}_x \triangleq\\ \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (\mathbb{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{F}_x : (H = \prod_{x\in X}\mathbb{F}_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \mathbb{F}_s = E_s\ \forall s \in X\setminus K)\}\\ \forall (\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x];\end{gathered} \tag{4.3}$$

в дальнейшем мы следуем (4.3). Полезно отметить, что (см. (4.2))

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{S}_x \in \Pi[\mathbb{E}]\ \ \forall (\mathcal{S}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\Pi[E_x]$$

(данное свойство устанавливается подобно [14, предложение III.3.1]). Если M — непустое множество и $\mathcal{M} \in \pi[M]$, то $\langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[M] \subset (\mathrm{Fam})[M]$ (см. раздел 1). Как следствие получаем, что

$$\prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x]. \tag{4.4}$$

Поэтому (см. (4.3), (4.4)) определено, в частности, произведение МСС:

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{E}_x :\ (H = \prod_{x\in X}\Sigma_x) \& (\ \exists K \in \mathrm{Fin}(X) :\\ \Sigma_s = E_s\ \forall s \in X\setminus K)\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{E}))\ \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x].\end{gathered} \tag{4.5}$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$, *то*

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$. С учетом (3.1) и (4.5) отметим, что $\mathbb{E} \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$. Итак,

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E})).$$

При этом $\mathcal{E}_t \in \langle \mathcal{L}_t - \mathrm{link}\rangle_0[E_t]\ \forall t \in X$. Тогда, в частности, $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{L}_t$ при $t \in X$. С учетом (3.3) и (4.5) получаем, что

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \mathcal{P}'(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x). \tag{4.7}$$

Выберем произвольно $\Gamma' \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$ и $\Gamma'' \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$. С учетом (4.5) подберем $(\Gamma'_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$ со свойствами

$$(\Gamma' = \prod_{x\in X} \Gamma'_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Gamma'_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.8}$$

Кроме того, подберем (см. (4.5)) $(\Gamma''_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$ со свойствами

$$(\Gamma'' = \prod_{x\in X} \Gamma''_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Gamma''_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.9}$$

Из (4.8), (4.9) вытекает, что справедливо равенство

$$\Gamma' \cap \Gamma'' = \prod_{x\in X} (\Gamma'_x \cap \Gamma''_x). \tag{4.10}$$

По выбору $(\Gamma'_x)_{x\in X}$ и $(\Gamma''_x)_{x\in X}$ имеем, что $\Gamma'_t \cap \Gamma''_t \neq \varnothing$ при $t \in X$. Тогда в силу (4.10) получаем (с использованием аксиомы выбора), что $\Gamma' \cap \Gamma'' \neq \varnothing$. Поскольку выбор Γ' и Γ'' был произвольным, получаем (см. (4.7)) свойство сцепленности $\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$:

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]. \tag{4.11}$$

Выберем произвольно множество $\Lambda \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$, для которого

$$\Lambda \cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x. \tag{4.12}$$

По выбору Λ имеем для некоторого отображения $(\Lambda_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$ свойство

$$(\Lambda = \prod_{x\in X} \Lambda_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Lambda_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.13}$$

Выберем произвольно $u \in X$, получая семейство $\mathcal{E}_u \in \langle \mathcal{L}_u - \mathrm{link}\rangle_0[E_u]$. При этом, конечно, $\Lambda_u \in \mathcal{L}_u$, а потому (см. (1.4))

$$(\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u) \Longrightarrow (\Lambda_u \in \mathcal{E}_u). \tag{4.14}$$

Пусть $N \in \mathcal{E}_u$. Введем в рассмотрение отображение $(N_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ по следующему правилу

$$(N_u \triangleq N) \& (N_x \triangleq E_x \ \ \forall x \in X \setminus \{u\}). \tag{4.15}$$

Тогда (см. раздел 1) $N_x \in \mathcal{E}_x \ \forall x \in X$, причем $\exists K \in \mathrm{Fin}(X): \ N_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K$. Как легко видеть,

$$\mathbf{N} \triangleq \prod_{x \in X} N_x \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x. \tag{4.16}$$

Из (4.12) и (4.16) вытекает, что $\Lambda \cap \mathbf{N} \neq \varnothing$, а потому (см. (4.13), (4.16))

$$\prod_{x \in X} (\Lambda_x \cap N_x) = (\prod_{x \in X} \Lambda_x) \cap (\prod_{x \in X} N_x) \neq \varnothing.$$

Последнее означает, что $\Lambda_x \cap N_x \neq \varnothing$ при $x \in X$. В частности (см. (4.15)),

$$\Lambda_u \cap N = \Lambda_u \cap N_u \neq \varnothing.$$

Поскольку N выбиралось произвольно, установлено, что $\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u$. С учетом (4.14) получаем, что $\Lambda_u \in \mathcal{E}_u$. Коль скоро и u выбиралось произвольно, установлено, что $\Lambda_x \in \mathcal{E}_x \ \ \forall x \in X$. Итак,

$$(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{E}_x. \tag{4.17}$$

Из (4.13) и (4.17) вытекает при условии (4.12), что (см. (4.3)) $\Lambda \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x$. Итак, истинна импликация

$$(\Lambda \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x) \Longrightarrow (\Lambda \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

Поскольку Λ выбиралось произвольно, получаем, что $\forall L \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x) \Longrightarrow (L \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

С учетом (1.4) и (4.11) получаем требуемое свойство (4.6). $\square$

Напомним очевидное следствие определений:

$$(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.18}$$

Поэтому (см. (3.11), (4.18)) у нас определено $\mathbf{P}(H) \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)$ при $H \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$. В силу (3.12) и (4.18)

$$H = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(H)(x) \ \ \forall H \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.19}$$

Разумеется (см. (4.19)), получаем с очевидностью свойство

$$\mathbf{P}(H) \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}'(E_x) \ \ \forall H \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Далее, с учетом (3.17) и (4.18) имеем, что

$$\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{P}'(E_\chi) \ \ \forall H \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \ \forall \chi \in X;$$

в этой связи см. (3.18). С учетом (3.18) и (4.18) при $H \in (\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ и $\chi \in X$ имеем равенство $\mathbf{P}_\chi(H) = \mathbf{P}(H)(\chi)$. Используя (4.19), получаем следующее полезное следствие: при $H \in (\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$

$$H = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(H). \tag{4.20}$$

Отметим здесь же очевидное свойство: при $H \in (\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ и $\chi \in X$ имеет место $\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\}$. Если же $\mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\})$ и $\chi \in X$, то $\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\})$; см. (3.23). В частности, при

$$\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$$

непременно $\mathcal{E} \subset (\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$, а потому определено семейство $\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\})$ при $\chi \in X$.

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если* $\mathcal{T} \in \langle \bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ *и* $u \in X$, *то*

$$\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \in \langle \mathcal{L}_u - \mathrm{link}\rangle_0[E_u]. \tag{4.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{T} \in \langle \bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$, а также $u \in X$. Тогда определено $\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\})$. Поскольку $\mathcal{T} \neq \varnothing$, имеем $\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}_u)$. Отметим (см. (4.20)), что

$$H = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(H) \ \ \forall H \in \mathcal{T}. \tag{4.22}$$

Покажем, что $\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})$ — сцепленное семейство. Действительно, пусть $\Gamma \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})$ и $\Lambda \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})$. Тогда для некоторых множеств $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{T}$ и $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{T}$ имеем равенства

$$(\Gamma = \mathbf{P}_u(\tilde{\Gamma}))\&(\Lambda = \mathbf{P}_u(\tilde{\Lambda})) \tag{4.23}$$

(при этом $\Gamma \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$ и $\Lambda \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$). Заметим, что в силу (4.22)

$$(\tilde{\Gamma} = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma}))\&(\tilde{\Lambda} = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda})). \tag{4.24}$$

В силу сцепленности $\mathcal{T}$ получаем, что $\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Lambda} \neq \varnothing$, а тогда (см. (4.24))

$$\prod_{x \in X}(\mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma}) \cap \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda})) = (\prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma})) \cap (\prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda})) \neq \varnothing.$$

В этом случае $\mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma}) \cap \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda}) \neq \varnothing \ \ \forall x \in X$. В частности, имеем с учетом (4.23), что $\Gamma \cap \Lambda \neq \varnothing$. Итак, получаем, что

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma_1 \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \ \ \forall \Sigma_2 \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}).$$

В итоге получаем требуемое свойство сцепленности:

$$\mathbf{P}_u^1(\mathcal{T}) \in \langle \mathcal{L}_u - \mathrm{link}\rangle[E_u]. \tag{4.25}$$

Выберем произвольно множество $\mathbb{M} \in \mathcal{L}_u,$ для которого

$$\mathbb{M} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T}). \tag{4.26}$$

Ясно, что (см. (4.26)) $\mathbb{M} \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$ и, в частности, $\mathbb{M} \in \mathcal{P}'(E_u).$ Введем в рассмотрение отображение

$$(\mathbb{M}_x^*)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X,$$

для которого $\mathbb{M}_u^* \triangleq \mathbb{M}$ и $\mathbb{M}_x^* \triangleq E_x \ \ \forall x \in X \setminus \{u\}.$ Ясно, что

$$(\mathbb{M}_x^*)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}).$$

Поскольку $\{u\} \in \mathrm{Fin}(X),$ получаем свойство

$$\tilde{\mathbb{M}} \triangleq \prod_{x \in X} \mathbb{M}_x^* \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x. \tag{4.27}$$

В силу максимальности $\mathcal{T}$ имеем следующую импликацию

$$(\tilde{\mathbb{M}} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{T}) \Longrightarrow (\tilde{\mathbb{M}} \in \mathcal{T}). \tag{4.28}$$

Выберем произвольно $\Omega \in \mathcal{T}.$ Тогда, в частности, имеем, что

$$\Omega \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Поэтому при $x \in X$ определено множество $\mathbf{P}_x(\Omega) \in \mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}.$ В частности, $\mathbf{P}_u(\Omega) \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}.$ С учетом (4.20) имеем равенство

$$\Omega = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\Omega).$$

Тогда с учетом (4.27) получаем следующее равенство

$$\tilde{\mathbb{M}} \cap \Omega = \prod_{x \in X} (\mathbb{M}_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Omega)). \tag{4.29}$$

При этом (см. (3.22)) $\mathbf{P}_u(\Omega) \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T})$ по выбору $\Omega,$ а тогда в силу (4.26)

$$\mathbb{M}_u^* \cap \mathbf{P}_u(\Omega) = \mathbb{M} \cap \mathbf{P}_u(\Omega) \neq \varnothing. \tag{4.30}$$

Если же $x \in X \setminus \{u\},$ то $\mathbb{M}_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Omega) = E_x \cap \mathbf{P}_x(\Omega) = \mathbf{P}_x(\Omega) \neq \varnothing.$ В итоге (см. (4.30)) $\mathbb{M}_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Omega) \neq \varnothing \ \forall x \in X.$ Из (4.29) имеем, что $\tilde{\mathbb{M}} \cap \Omega \neq \varnothing$ (используем аксиому выбора). Поскольку выбор Ω был произвольным, установлено, что $\tilde{\mathbb{M}} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{T}.$ В силу (4.28) $\tilde{\mathbb{M}} \in \mathcal{T},$ а тогда $\mathbf{P}_u(\tilde{\mathbb{M}}) \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T}),$ где (см. (3.15))

$$\mathbf{P}_u(\tilde{\mathbb{M}}) = \mathbf{P}_u(\prod_{x \in X} \mathbb{M}_x^*) = \mathbb{M}_u^* = \mathbb{M}.$$

Итак, $\mathbb{M} \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})$ при условии (4.26), т. е. истинна импликация

$$(\mathbb{M} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})) \Longrightarrow (\mathbb{M} \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})).$$

Коль скоро и выбор $\mathbb{M}$ был произвольным, установлено, что $\forall L \in \mathcal{L}_u$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})) \Longrightarrow (L \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})).$$

С учетом (1.4) и (4.25) получаем требуемое свойство (4.21). □

Из предложения 4.2 следует, что

$$(\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}))_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{4.31}$$

С учетом (4.3) и (4.4) получаем теперь (см. (4.31)), что определено

$$\bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{E})) \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}].$$

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$, *то непременно справедливо равенство*

$$\mathcal{E} = \bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}). \tag{4.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$. Тогда согласно (4.31) имеем, что

$$\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall x \in X$$

(см. предложение 4.2). В силу (4.5) и предложения 4.1 имеем, что

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) | \exists (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) : \ (H = \prod_{x\in X} \Sigma_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \\ \Sigma_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}].\end{gathered} \tag{4.33}$$

Поэтому (см. (1.3), (4.33)) получаем импликацию

$$(\mathcal{E} \subset \bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E})) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E})). \tag{4.34}$$

Выберем произвольно $\Omega \in \mathcal{E}$. Тогда по выбору $\mathcal{E}$ имеем, в частности, что (см. (1.2), (1.4))

$$\Omega \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x.$$

Поэтому для некоторого отображения $(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x$ имеем

$$(\Omega = \prod_{x\in X} \Omega_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ \Omega_s = E_s \ \ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.35}$$

С учетом сцепленности $\mathcal{E}$ получаем, что $\Omega \neq \varnothing$, а тогда (см. (4.35)) $\Omega_x \neq \varnothing$ при $x \in X$. Поэтому

$$(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}), \tag{4.36}$$

а тогда (см. (3.19), (4.36)) получаем, что

$$\mathbf{P}_\chi(\Omega) = \mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X}\Omega_x) = \Omega_\chi \ \ \forall \chi \in X. \tag{4.37}$$

С учетом сцепленности семейства $\mathcal{E}$ имеем (см. (3.5), (3.16)), что $\Omega \in (\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x)\setminus\{\varnothing\}$, где

$$(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x)\setminus\{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x)\setminus\{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x\in X}\mathcal{P}(E_x))\setminus\{\varnothing\},$$

а тогда согласно (3.22) получаем, что

$$\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) = (\mathbf{P}_x)^1(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(E_x)) \ \ \forall x \in X.$$

С другой стороны, по выбору Ω имеем свойство

$$\mathbf{P}_x(\Omega) \in \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \ \ \forall x \in X. \tag{4.38}$$

С учетом (4.37) и (4.38) получаем, что

$$\Omega_x \in \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \ \ \forall x \in X. \tag{4.39}$$

В свою очередь, из (4.39) имеем с очевидностью включение

$$(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}),$$

и при этом реализуются свойства (4.35). Получили в итоге, что $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ и, кроме того,

$$\exists (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) : \ (\Omega = \prod_{x\in X}\Sigma_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ \Sigma_s = E_s \ \ \forall s \in X\setminus K).$$

Из (4.5) и (4.31) получаем, как следствие, что $\Omega \in \bigotimes_{x\in X}\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E})$. Тем самым установлено, что

$$\mathcal{E} \subset \bigotimes_{x\in X}\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}). \tag{4.40}$$

Из (4.34) и (4.40) вытекает требуемое свойство (4.32). □

Из (4.31) и предложения 4.2 вытекает, что

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] \ \ \exists (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] : \ \mathcal{E} = \bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x. \tag{4.41}$$

Теорема 4.1. *Справедливо равенство*

$$\langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] = \{\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x : \ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]\}.$$

Доказательство сводится к очевидной комбинации (4.41) и предложения 4.1. Мы получили аналог теоремы 3.1 для варианта π-системы измеримых в широком смысле прямоугольников, определяемого в (3.3).

5. Добавление: одно свойство гомеоморфности

В настоящем разделе мы вернемся к построениям [15] (см. также раздел 2), фиксируя непустые множества E_1 и E_2, а также π-системы $\mathcal{L}_1 \in \pi[E_1]$ и $\mathcal{L}_2 \in \pi[E_2]$. Следуем обозначениям раздела 2 (см., в частности, (2.1), (2.2)). Рассматриваем далее топологии стоуновского типа на множествах $\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1]$, $\langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$ и $\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$. Наша цель здесь состоит в том, чтобы дополнить (2.6) соответствующим положением о гомеоморфности. Нам потребуются при этом некоторые представления из [1–3, 15, 16]. Прежде всего введем ряд общих обозначений.

Для любого множества S через $(\mathrm{top})[S]$ обозначаем семейство всех топологий на S:

$$(\mathrm{top})[S] \triangleq \{\tau \in \pi[S] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}.$$

Если E — непустое множество и $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то полагаем, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | L \in \mathcal{E}\} \ \ \forall L \in \mathcal{L}; \tag{5.1}$$

кроме того, введем в рассмотрение семейство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|\Lambda] : \Lambda \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E])), \tag{5.2}$$

являющееся (открытой) предбазой топологии стоуновского типа

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]], \tag{5.3}$$

определяемой в [1, (6.1)] на множестве всех МСС на $\mathcal{L}$ (в связи с [1, (6.1)] напомним операции над семействами в [1, раздел 2]). Напомним (2.4)–(2.6). Справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $A \in \mathcal{L}_1$ *и* $B \in \mathcal{L}_2$, *то*

$$\begin{aligned}&\{z \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2] | \ A \times B \in \mathrm{pr}_1(z)\{\times\}\mathrm{pr}_2(z)\}\\ &= \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_2|B].\end{aligned}$$

Доказательство следует из определений (см. (2.1), (5.1)). С учетом (2.6) введем в рассмотрение отображение

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &\triangleq (\mathrm{pr}_1(z)\{\times\}\mathrm{pr}_2(z))_{z \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]}\\ &\in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]^{\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Итак, $\mathbf{f} : \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2] \longrightarrow \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$ таково, что

$$\mathbf{f}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2].$$

Напомним, что (см. (2.2)) $A \times B \in \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2$ при $A \in \mathcal{L}_1$ и $B \in \mathcal{L}_2$.

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Если* $A \in \mathcal{L}_1$ *и* $B \in \mathcal{L}_2$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{f}^{-1}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B]) = \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_2|B].$$

Доказательство легко извлекается из (2.4), (5.4) и предложения 5.1. Как следствие получаем (см. (5.2)), что

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2] \ \ \forall \mathbb{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1 \times E_2; \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]. \tag{5.5}$$

В связи с (5.5) отметим использование следующего расширительно понимаемого аналога (2.1):

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1] \times \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2]\}. \tag{5.6}$$

Заметим, что аналоги (5.6) потребуются и при введении оснащения множества $\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$ стандартным произведением топологий стоуновского типа. В этой связи напомним, что топология

$$\mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]], \tag{5.7}$$

отвечающая упомянутому произведению, порождается (открытой) базой

$$\mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle\{\times\}\mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \times \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle\}, \tag{5.8}$$

где также используется расширительное толкование (2.1).

П р е д л о ж е н и е 5.3. *Отображение* $\mathbf{f}$ (5.4) *непрерывно в смысле топологий* $\mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$ *и* $\mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1] \subset \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \ \text{ и } \ \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2] \subset \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle,$$

а потому (см. (5.6), (5.8))

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2] \subset \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle\{\times\}\mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle. \tag{5.9}$$

Из (5.5), (5.9) получаем, что

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \ \ \forall \mathbb{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1 \times E_2; \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]. \tag{5.10}$$

Поскольку (см. (5.2), (5.3)) $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1 \times E_2; \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]$ есть открытая предбаза, порождающая топологию $\mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle$, (5.10) означает, что $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение (см. [18, предложение 1.4.1]). □

П р е д л о ж е н и е 5.4. *Отображение* $\mathbf{f}$, *заданное соотношением* (5.4), *является биекцией множества* $\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$ *на* $\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что в силу (2.6) и (5.4) отображение $\mathbf{f}$ сюръективно:

$$\mathbf{f}^1(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]) = \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]. \tag{5.11}$$

Для проверки инъективности введем в рассмотрение отображения

$$(\varphi_1 \in (\mathcal{L}_1 \setminus \{\varnothing\})^{(\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2)\setminus\{\varnothing\}})\&(\varphi_2 \in (\mathcal{L}_2 \setminus \{\varnothing\})^{(\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2)\setminus\{\varnothing\}}),$$

определяемые в [15, (7.3),(7.4)] при очевидных переобозначениях (имеются в виду замены

$$X \to E_1,\ Y \to E_2,\ \mathcal{X} \to \mathcal{L}_1,\ \mathcal{Y} \to \mathcal{L}_2,$$

где $X, Y, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ соответствуют [15, раздел 7]). Важно, что

$$S = \varphi_1(S) \times \varphi_2(S)\ \ \forall S \in (\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2) \setminus \{\varnothing\}.$$

При этом, как легко проверить с учетом определений [15, раздел 7], имеет место следующее свойство образов семейств при действии φ_1 и φ_2 : если $\mathcal{A} \in \langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1]$ и $\mathcal{B} \in \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2]$, то (см. (2.6)) $\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$, где

$$\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \subset \mathcal{P}((\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2) \setminus \{\varnothing\}),$$

и при этом справедливы следующие два равенства:

$$((\varphi_1)^1(\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}) = \mathcal{A})\&((\varphi_2)^1(\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}) = \mathcal{B}). \tag{5.12}$$

Пусть выбраны произвольно

$$(\alpha \in \langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2])\&(\beta \in \langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2]),$$

для которых справедливо равенство

$$\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\beta). \tag{5.13}$$

Тогда определены сцепленные семейства (а, точнее, МСС)

$$\begin{gathered}(\mathfrak{U}_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(\alpha) \in \langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1])\&(\mathfrak{U}_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(\alpha) \in \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2])\&\\ \&(\mathfrak{V}_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(\beta) \in \langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1])\&(\mathfrak{V}_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(\beta) \in \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2]).\end{gathered} \tag{5.14}$$

При этом в силу (5.4) и (5.14) $\alpha = (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$, $\beta = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$, $\mathbf{f}(\alpha) = \mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2$, $\mathbf{f}(\beta) = \mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2$. Получили (см. (5.13)) равенство

$$\mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2. \tag{5.15}$$

С учетом (5.12) и (5.15) получаем теперь цепочки равенств

$$\begin{gathered}(\mathfrak{U}_1 = (\varphi_1)^1(\mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2) = (\varphi_1)^1(\mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2) = \mathfrak{V}_1)\&\\ \&(\mathfrak{U}_2 = (\varphi_2)^1(\mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2) = (\varphi_2)^1(\mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2) = \mathfrak{V}_2).\end{gathered} \tag{5.16}$$

Из (5.16) вытекает (при условии (5.13)), что $\alpha = \beta$. Итак, установлена импликация

$$(\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\beta)) \Longrightarrow (\alpha = \beta). \tag{5.17}$$

Поскольку выбор α и β был произвольным, из (5.17) следует инъективность $\mathbf{f}$ и, с учетом (5.11), получаем требуемое свойство биективности. □

П р е д л о ж е н и е 5.5. *Если $A \in \mathcal{L}_1$ и $B \in \mathcal{L}_2$, то справедливо равенство*

$$\mathbf{f}^1(\langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle^0[E_2|B]) = \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B].$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{L}_1$ и $B \in \mathcal{L}_2$. Тогда

$$\langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle^0[E_2|B] \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2]) \tag{5.18}$$

(см. (5.1)). Отметим (см. предложение 5.4), что

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H})) = \mathbb{H} \quad \forall \mathbb{H} \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]). \tag{5.19}$$

При этом $A \times B \in \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2$, а потому согласно (5.1)

$$\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B] \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]).$$

Из (5.18), (5.19) и предложения 5.2 получаем, что

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B] &= \mathbf{f}^1(\mathbf{f}^{-1}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B])) \\ &= \mathbf{f}^1(\langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle^0[E_2|B]),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 5.6. *Отображение* $\mathbf{f}$, *заданное соотношением* (5.4), *открыто: при* $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$

$$\mathbf{f}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle.$$

Доказательство. В силу предложения 5.4 имеем при $m \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{H}_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2])^m$

$$\mathbf{f}^1(\bigcap_{i=1}^{m} \mathbb{H}_i) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{f}^1(\mathbb{H}_i). \tag{5.20}$$

Фиксируем $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$. Выберем произвольно $\mathcal{E} \in \mathbf{f}^1(\mathbb{G})$. Поэтому для некоторого $\eta \in \mathbb{G}$ имеем равенство $\mathcal{E} = \mathbf{f}(\eta)$. Тогда, в частности,

$$\eta \in \langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2].$$

При этом $\mathfrak{U} \triangleq \text{pr}_1(\eta) \in \langle \mathcal{L}_1 - \text{link}\rangle_0[E_1]$ и $\mathfrak{V} \triangleq \text{pr}_2(\eta) \in \langle \mathcal{L}_2 - \text{link}\rangle_0[E_2]$; тогда $\eta = (\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$. Можно указать (см. (5.7), (5.8)) $\mathbb{M} \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle\{\times\}\mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$, для которого

$$(\eta \in \mathbb{M})\&(\mathbb{M} \subset \mathbb{G}). \tag{5.21}$$

С учетом (5.8) можно указать

$$(\Gamma' \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle)\&(\Gamma'' \in \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle,$$

для которых реализуется следующее равенство:

$$\mathbb{M} = \Gamma' \times \Gamma''. \tag{5.22}$$

При этом, конечно, получаем очевидные включения

$$(\mathfrak{U} \in \Gamma')\&(\mathfrak{V} \in \Gamma'').$$

Таким образом, множества Γ' и Γ'' являются (открытыми) окрестностями МСС $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ соответственно. Поэтому (см. [19, (2.6.3)]) можно указать

$$p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N},\ (\tilde{U}_i)_{i \in \overline{1,p}} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1]^p,\ (\tilde{V}_j)_{j \in \overline{1,q}} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2]^q,$$

для которых имеют место следующие свойства:

$$(\mathfrak{U} \in \bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i)\&(\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i \subset \Gamma')\&(\mathfrak{V} \in \bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)\&(\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j \subset \Gamma''). \tag{5.23}$$

Здесь учитывается отмеченная в начале раздела связь семейств (5.2) и (5.3). При этом согласно (5.2) и предложению 5.5 при $\mathbb{A} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1]$ и $\mathbb{B} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2]$

$$\mathbf{f}^1(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1 \times E_2; \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]$$

(в самом деле, $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1; \mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2; \mathcal{L}_2]$), а тогда, в частности,

$$\mathbf{f}^1(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2 | \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle. \tag{5.24}$$

Отметим здесь же, что, как легко видеть, справедливо равенство

$$(\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j) = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{q} (\tilde{U}_i \times \tilde{V}_j).$$

Как следствие получаем очевидное равенство:

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)) = \mathbf{f}^1(\bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{q} (\tilde{U}_i \times \tilde{V}_j)).$$

С учетом (5.20) имеем теперь следующее представление:

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)) = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{q} \mathbf{f}^1(\tilde{U}_i \times \tilde{V}_j). \tag{5.25}$$

Вместе с тем в силу (5.24) имеем по выбору $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_p$ и $\tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_q$, что

$$\mathbf{f}^1(\tilde{U}_i \times \tilde{V}_j) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2 | \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle \ \ \forall i \in \overline{1,p}\ \forall j \in \overline{1,q}. \tag{5.26}$$

Из (5.25), (5.26) получаем по аксиомам топологии свойство

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2 | \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle. \tag{5.27}$$

В силу (5.23) получаем, в частности, что справедливо

$$(\mathfrak{U} \in \tilde{U}_i \ \ \forall i \in \overline{1,p})\&(\mathfrak{V} \in \tilde{V}_j \ \ \forall j \in \overline{1,q}).$$

Поэтому $\eta = (\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \in \tilde{U}_i \times \tilde{V}_j \ \ \forall i \in \overline{1,p} \ \ \forall j \in \overline{1,q}$. Как следствие по выбору η получаем, что

$$\mathcal{E} = \mathbf{f}(\eta) \in \mathbf{f}^1(\tilde{U}_i \times \tilde{V}_j) \ \ \forall i \in \overline{1,p} \ \ \forall j \in \overline{1,q}. \tag{5.28}$$

Из (5.25) и (5.28) получаем очевидное включение

$$\mathcal{E} \in \mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)). \tag{5.29}$$

Тогда в силу (5.27), (5.29) имеем, что

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2 | \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle : \ \mathcal{E} \in \mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)). \tag{5.30}$$

Иными словами, (5.27) есть открытая окрестность МСС $\mathcal{E}$. Покажем, что она содержится в множестве $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$. Действительно, в силу (5.21), (5.22)

$$\Gamma' \times \Gamma'' \subset \mathbb{G}. \tag{5.31}$$

Из (5.23) и (5.31) имеем теперь, что справедливо свойство

$$(\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j) \subset \mathbb{G}. \tag{5.32}$$

В свою очередь, из (5.32) вытекает следующее вложение

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)) \subset \mathbf{f}^1(\mathbb{G}). \tag{5.33}$$

Из (5.30) и (5.33) получаем, что $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$ есть окрестность $\mathcal{E}$ в смысле [20, гл. I]. Поскольку $\mathcal{E}$ выбиралось произвольно, получили, что $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$ является окрестностью (в смысле [20, гл. I]) каждой своей точки. Поэтому (см. [20, гл. I, § 1, предложение 1]) множество $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$ открыто: $\mathbf{f}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2 | \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle$. □

Теорема 5.1. *Отображение* $\mathbf{f}$, *заданное соотношением* (5.4), *есть гомеоморфизм ТП* $((\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2], \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle)$ *на ТП* $(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$, $\mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложений 5.3–5.5 получаем, что $\mathbf{f}$ есть открытая (и непрерывная) биекция, что и означает требуемое свойство гомеоморфности данного отображения (см. [21, предложение 3.12]). □

Итак, установлена гомеоморфность ТП:

$$(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2], \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle),$$
$$(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2], \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle).$$

References

[1] А. Г. Ченцов, “Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, “Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[2] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27**:3 (2017), 365–388. [A. G. Chentsov, “Ultrafilters and maximal linked systems”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:3 (2017), 365–388 (In Russian)].

[3] А. Г. Ченцов, “Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 240–257. [A. G. Chentsov, “Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 240–257 (In Russian)].

[4] J. de Groot, “Superextensions and supercompactness”, *Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, I International Symposium “Extension Theory of Topological Structures and its Applications” (Berlin, 1969), Proceedings of the Symposium, VEB Deutscher Verlag Wis., Berlin, 1969, 89–90.

[5] J. van Mill, “Supercompactness and Wallman spaces”, *Mathematical Centre Tracts.* V. 85, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977, 238 pp.

[6] M. Strok, A. Szymanski, “Compact metric spaces have binary subbases”, *Fund. Math*, **89**:1 (1975), 81–91.

[7] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Физматлит, М., 2006, 336 с. [V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov, *General Topology. Basic Constructions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian), 336 pp.]

[8] А. В. Архангельский, “Компактность”, *Общая топология – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **50**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–128. [A. V. Arkhangel’skii, “Compactness”, *General topology – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **50**, VINITI, Moscow, 1989, 5–128 (In Russian)].

[9] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005, 402 с. [A. V. Bulinskiy, A. N. Shiryaev, *Theory of Stochastic Processes*, Fizmatlit, M., 2005 (In Russian), 402 pp.]

[10] А. Г. Ченцов, “К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств”, Тр. ИММ УрО РАН, **19**, 2013, 307–319; англ. пер.: *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **284**:suppl. 1 (2014), 65–78.

[11] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры, II*, Уральский государственный технический университет – УПИ, Екатеринбург, 2010, 541 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory, II*, Ural State Technical University - UPI, Yekaterinburg, 2010 (In Russian), 541 pp.]

[12] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 416 pp.]

[13] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Science, Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[14] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969, 309 с. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian), 309 pp.]

[15] А. Г. Ченцов, “Фильтры и сцепленные семейства множеств”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **30**:3 (2020), 444–467. [A. G. Chentsov, “Filters and linked families of sets”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30**:3 (2020), 444–467 (In Russian)].

[16] А. Г. Ченцов, “О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, “On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type”, *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].

[17] В. И. Богачев, *Слабая сходимость мер*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2016, 396 с. [V. I. Bogachev, *Weak Convergence of Measures*, Institute for Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2016 (In Russian), 396 pp.]

[18] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 751 с. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian), 751 pp.]

[19] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 2002, 408 c.

[20] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 272 с. [N. Burbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 272 pp.]

[21] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979, 336 с. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, High School Publ., Moscow, 1979 (In Russian), 336 pp.]

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 03.12.2020 г.
Поступила после рецензирования 10.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Received 03.12.2020
Reviewed 10.02.2021
Accepted for press 05.03.2021